23ª Competencia de MateClubes 2020
Resolución de la Ronda de Entrenamiento
Nivel Preolímpico

1. Mario vende naranjas a \$5 cada una y Rafa vende mandarinas a \$4 cada una.

   Entre los dos vendieron en total 180 frutas y ambos recaudaron la misma cantidad de dinero.

   ¿Cuántas mandarinas vendió Rafa?

   Explicar cómo llegaron a la respuesta.

   Solución

   Para que ambos recauden la misma cantidad de dinero por cada 4 naranjas que vende Mario, Rafa debe vender 5 mandarinas. Hacemos una tabla teniendo en cuenta esto hasta llegar a 180 frutas en total.

Mario	Rafa	Total
4	5	9
8	10	18
12	15	27
16	20	36
20	25	45
24	30	54
28	35	63
32	40	72
36	45	81
40	50	90
44	55	99
48	60	108
52	65	117
56	70	126
60	75	135
64	80	144
68	85	153
72	90	162
76	95	171
80	**100**	**180**

   Rafa vendió 100 mandarinas.

2. Reemplazar cada letra por un dígito de 1 a 9 de manera que la cuenta resulte correcta. Letras iguales corresponden a dígitos iguales y letras distintas corresponden a dígitos distintos.

$$\begin{array}{cccc} & & C & A \\ + & & C & B \\ \hline & A & B & C \end{array}$$

   ¿Cuál es el número ABC?

   ¿Cómo llegaron a la respuesta?

Solución

Como sabemos que CA y CB son números de dos cifras, su suma no puede ser mayor a 200. Entonces A tiene que ser igual a 1.

$$\begin{array}{cccc} & & C & 1 \\ + & & C & B \\ \hline & 1 & B & C \end{array}$$

Además B no puede ser igual a 9, porque C no puede ser igual a 0. Entonces, B es menor a 9 y C=1+B. Probando todas las posibilidades para B, llegamos a que la cuenta es correcta si B=8 y C= 9. Nos queda:

$$\begin{array}{cccc} & & 9 & 1 \\ + & & 9 & 8 \\ \hline & 1 & 8 & 9 \end{array}$$

El número ABC es igual a 189.

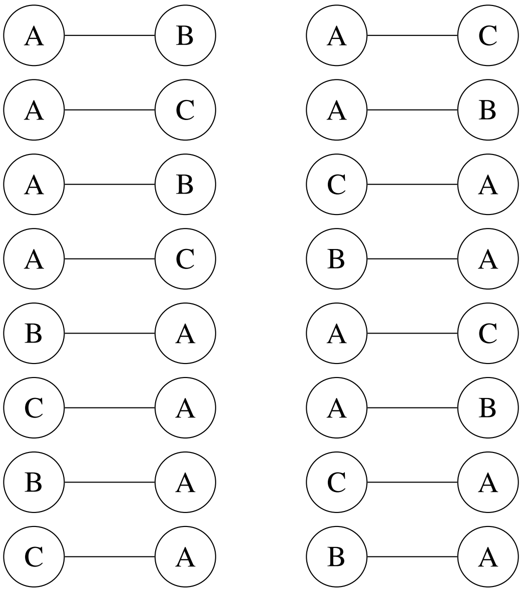
3. Marce quiere completar los cuatro círculos de la figura con: dos letras ‘A’, una ‘B’y una ‘C’, escribiendo una letra en cada círculo.

Si quiere que los círculos que están conectados tengan distintas letras, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

¿Cómo las contaron?

Solución

La única restricción que tiene Marce para completar las letras en la figura, es que en dos círculos conectados no puede haber dos letras A. Entonces, tiene que haber una sola A en los dos círculos de más a la izquierda, y una sola A en los dos círculos de más a la derecha, sin restricciones para las letras B y C. Usando esto, completamos todas las posibilidades.



Marce puede completar la figura de 8 maneras distintas.

23ª Competencia de MateClubes 2020
Resolución de la Ronda de Entrenamiento
Primer Nivel

1. Mario vende naranjas a $7 cada una y Rafa vende mandarinas a $4 cada una.

   Entre los dos vendieron en total 209 frutas y ambos recaudaron la misma cantidad de dinero.

   ¿Cuántas mandarinas vendió Rafa?

   Explicar cómo llegaron a la respuesta.

   Solución

   Para que ambos recauden la misma cantidad de dinero por cada 4 naranjas que vende Mario, Rafa debe vender 7 mandarinas. Hacemos una tabla teniendo en cuenta esto hasta llegar a 209 frutas en total.

Mario	Rafa	Total
4	7	11
8	14	22
12	21	33
16	28	44
20	35	55
24	42	66
28	49	77
32	56	88
36	63	99
40	70	110
44	77	121
48	84	132
52	91	143
56	98	154
60	105	165
64	112	176
68	119	187
72	126	198
76	**133**	**209**

   Rafa vendió 133 mandarinas.

2. Reemplazar cada letra por un dígito de 1 a 9 de manera que la cuenta resulte correcta. Letras iguales corresponden a dígitos iguales y letras distintas corresponden a dígitos distintos.

$$\begin{array}{cccc} & & B & A \\ + & A & B & C \\ \hline & B & A & B \end{array}$$

   ¿Cuál es el número ABC?

   Explicar cómo llegaron al resultado.

Solución

En la cuenta, cuando sumamos las decenas, hay dos posibilidades: nos llevamos 1 o no. Si no nos llevamos nada, cuando miramos las centenas nos queda A=B, pero esto no puede ser, ya que tienen que ser dígitos distintos. Entonces, nos llevamos 1 y B=A+1. Mirando las unidades, esto nos dice que C tiene que ser 1.

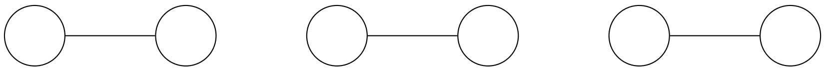
$$\begin{array}{cccc} & & \mathrm{B} & \mathrm{A} \\ + & \mathrm{A} & \mathrm{B} & 1 \\ \hline & \mathrm{B} & \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{array}$$

Probando todas las posibilidades para A, y teniendo en cuenta que B=A+1, llegamos a que la cuenta es correcta si A=8 y B=9. Nos queda:

$$\begin{array}{cccc} & & 9 & 8 \\ + & 8 & 9 & 1 \\ \hline & 9 & 8 & 9 \end{array}$$

El número ABC es igual a 891.

3. Marce quiere completar los seis círculos con: tres letras ‘A’, dos letras ‘B’y una ‘C’. Escribe una letra en cada círculo.

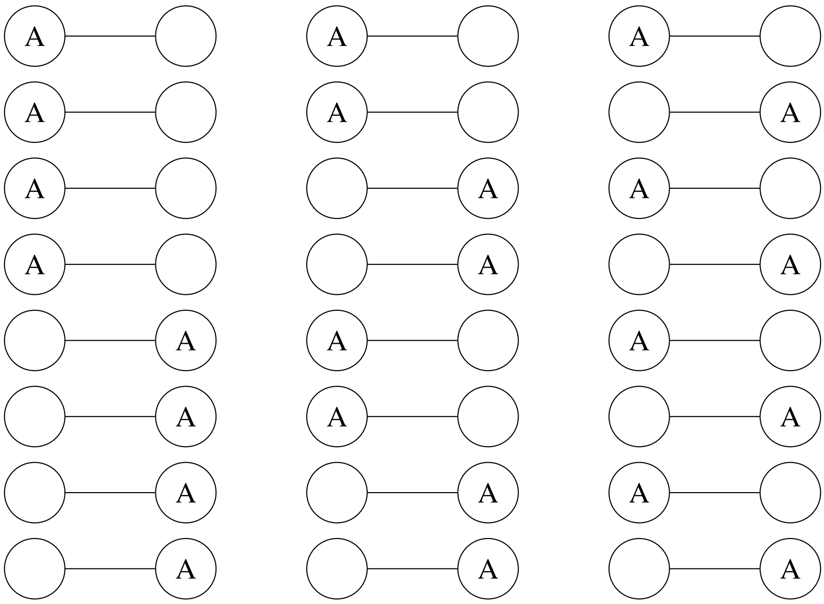


Si quiere que los círculos que están conectados por una línea tengan distintas letras, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

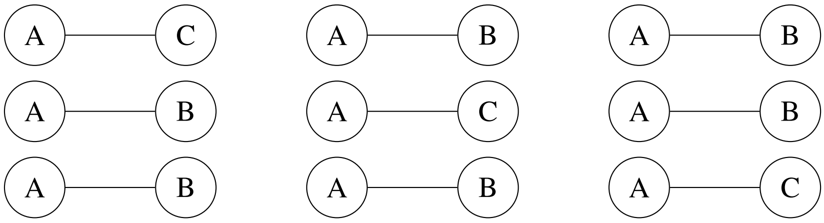
¿Cómo las contaron?

Solución

Como hay tres grupos de círculos y tres letras A, cada una debe ir en uno de estos grupos. Las distribuimos de todas las maneras posibles ordenadamente.



Hay 8 maneras de distribuir las letras A. Para la primer forma de distribuir las letras, distribuimos las dos B y la C.



Lo podemos hacer de 3 maneras. Lo mismo ocurre en los otros casos ya que podemos colocar la letra C en cualquiera de los tres lugares vacíos y completar con las B. Entonces, en total, Marce puede completar la figura de $8 \times 3 = 24$ maneras distintas.

23ª Competencia de MateClubes 2020
Resolución de la Ronda de Entrenamiento
Segundo Nivel

1. Mario vende naranjas a \$5 cada una, Rafa vende mandarinas a \$4 cada una y Betty vende limones a \$7 cada uno.

   Entre los tres vendieron en total 234 frutas.

   Mario y Rafa vendieron la misma cantidad de frutas.

   Rafa y Betty ganaron la misma cantidad de dinero.

   ¿Cuánto dinero juntaron entre los tres?

   Explicar cómo llegaron al resultado.

   Solución

   Para que Rafa y Betty ganen la misma cantidad de dinero por cada 7 mandarinas que vende Rafa, Betty debe vender 4 limones. Hacemos una tabla teniendo en cuenta esto y que Mario y Rafa vendieron la misma cantidad de frutas, hasta llegar a 234 frutas en total.

Mario	Rafa	Betty	total
7	7	4	18
14	14	8	36
21	21	12	54
28	28	16	72
35	35	20	90
42	42	24	108
49	49	28	126
56	56	32	144
63	63	36	162
70	70	40	180
77	77	44	198
84	84	48	216
91	**91**	**52**	**234**

   Entonces sabiendo cuantas frutas vendió cada uno calculamos cuanto dinero juntaron:

$$91 \times \$5 + 91 \times \$4 + 52 \times \$7 = \$1183.$$

2. Reemplazar cada letra por un dígito de 1 a 9 de manera que la cuenta resulte correcta. Letras iguales corresponden a dígitos iguales y letras distintas corresponden a dígitos distintos.

$$\begin{array}{r} \ C\ B\ A \\ +\ \ D\ D\ B \\ \hline A\ B\ C\ D \end{array}$$

   ¿Cuál es el número ABCD?

   Explicar cómo llegaron al resultado.

Solución

Como sabemos que CBA y DDB son números de tres cifras, su suma no puede ser mayor a 2000. Entonces A tiene que ser igual a 1.

$$\begin{array}{ccccc} + & & C & B & 1 \\ & & D & D & B \\ \hline & 1 & B & C & D \end{array}$$

Además B no puede ser igual a 9, porque D no puede ser igual a 0. Entonces, B es menor a 9 y D=1+B. Si fijamos un valor para B, D nos queda determinado. Y mirando las decenas, el valor de C también queda fijo. Por ejemplo, si B=2, D=B+1=3 y nos quedaría:

$$\begin{array}{ccccc} + & & C & 2 & 1 \\ & & 3 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & C & 3 \end{array}$$

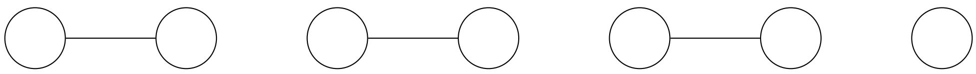
Mirando las decenas, obtendríamos que C=5, pero con este valor, la cuenta no es correcta.

Probando todas las posibilidades para B, llegamos a que la cuenta es correcta solamente si B=4, D= 5 y C=9. Nos queda:

$$\begin{array}{ccccc} + & & 9 & 4 & 1 \\ & & 5 & 5 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 9 & 5 \end{array}$$

El número ABCD es igual a 1495.

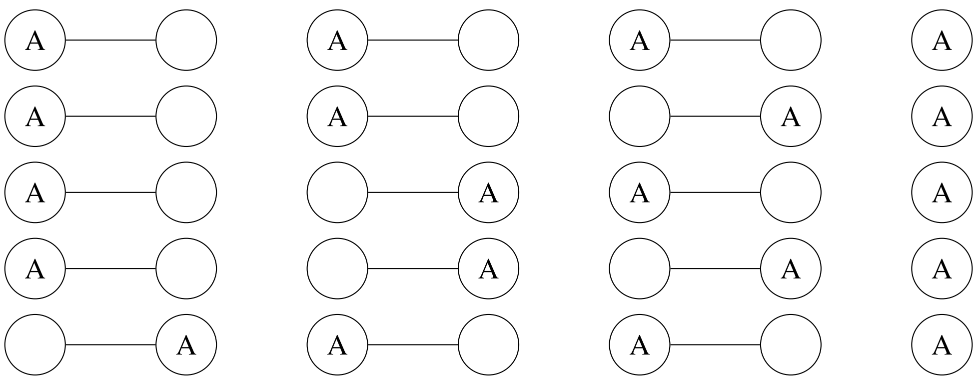
3. Marce quiere completar los siete círculos con: cuatro letras ‘A’, dos letras ‘B’y una ‘C’. Escribe una letra en cada círculo.

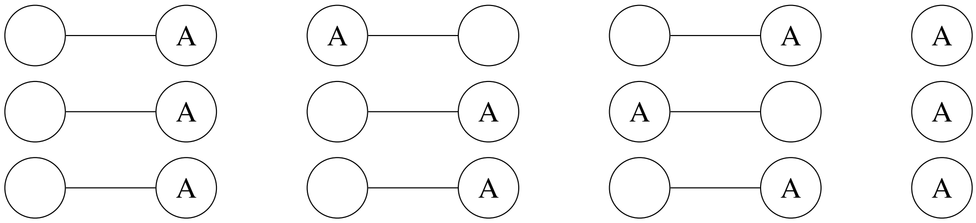


Si quiere que los círculos que están conectados tengan distintas letras, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

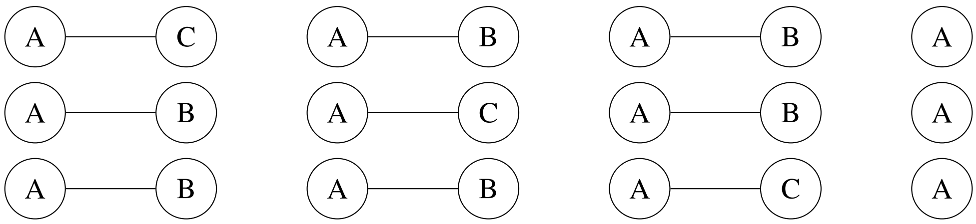
¿Cómo las contaron?

Como hay cuatro grupos de círculos y cuatro letras A, cada una debe ir en uno de estos grupos. Las distribuimos de todas las maneras posibles ordenadamente.





Hay 8 maneras de distribuir las letras A. Para la primer forma de distribuir las letras, distribuimos las dos B y la C.



Lo podemos hacer de 3 maneras. Lo mismo ocurre en los otros casos ya que podemos colocar la letra C en cualquiera de los tres lugares vacíos y completar con las B. Entonces, en total, Marce puede completar la figura de $8 \times 3 = 24$ maneras distintas.

23ª Competencia de MateClubes 2020
Resolución de la Ronda de Entrenamiento
Tercer Nivel

1. Rafa tiene tres recipientes, uno azul, uno rojo y uno verde.

   El recipiente azul está lleno de agua y los otros recipientes están vacíos.

   Mario pasa la mitad del agua que hay en el recipiente azul al rojo y la otra mitad al verde.

   Ahora el agua en el recipiente rojo ocupa 3/7 de la capacidad total del recipiente y el agua del recipiente verde ocupa 4/5 de la capacidad total del recipiente.

   Si la capacidad total de los recipientes rojo y verde juntos es de 2021 litros, ¿cuál es la capacidad total del recipiente azul?

   Explicar cómo llegaron al resultado.

   Solución

   Llamamos R a la capacidad del recipiente rojo. Dado que entre el recipiente rojo y el verde tienen una capacidad de 2021 litros, podemos concluir que la capacidad del recipiente verde es $2021 - R$.

   Por otro lado, la cantidad de agua en el recipiente rojo es la misma que en el recipiente verde ya que en ambos es la mitad de la capacidad del recipiente azul. Luego, igualando estas cantidades:

$$\frac{3}{7} \times R = \frac{4}{5} \times (2021 - R)$$

$$\frac{5}{4} \times \frac{3}{7} \times R = 2021 - R$$

$$\frac{15}{28} \times R + R = 2021$$

$$\frac{43}{28} \times R = 2021$$

$$\boxed{R = 1316}$$

   Ahora, como la cantidad de agua en el recipiente rojo es la mitad de la capacidad del azul, concluímos que la capacidad del recipiente azul es $2 \times \frac{3}{7} \times 1316 = 1128$ litros de agua.

2. Reemplazar cada letra por un dígito de 1 a 9 de manera que la cuenta resulte correcta. Letras iguales corresponden a dígitos iguales y letras distintas corresponden a dígitos distintos.

$$\begin{array}{ccccc} & & A & B & C \\ + & A & B & C & D \\ \hline & B & A & D & B \end{array}$$

   ¿Cuál es el número ABCD?

   Explicar cómo llegaron al resultado.

   Solución

Para que la cifra de las unidades de A+B sea A (como indica la segunda columna), B tendría que ser 0, 10 o cualquier otro múltiplo de 10, y no lo es ya que es un dígito entre 1 y 9. Esto nos dice que debe haber acarreo en la decena.

Ahora tenemos que la cifra de las unidades de A+B+1 (el último 1 viene del acarreo) debe ser igual a A y por lo tanto B+1 debe ser múltiplo de 10. La única manera de que esto ocurra es que sea B=9.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{A} & 9 & \mathrm{C} \\ + & \mathrm{A} & 9 & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline & 9 & \mathrm{A} & \mathrm{D} & 9 \end{array}$$

Como B=9 y A no puede ser 0, habrá obligatoriamente acarreo en la centena. Esto nos dice, mirando las unidades de mil, que A+1=B=9, por lo tanto A=8.

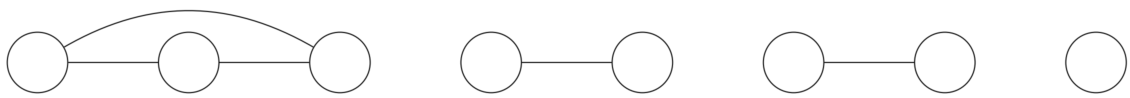
$$\begin{array}{ccccc} & & 8 & 9 & \mathrm{C} \\ + & 8 & 9 & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline & 9 & 8 & \mathrm{D} & 9 \end{array}$$

Sabemos que C+D=9, ya que no pueden sumar 19. Además sabemos que C+9 tiene como cifra de unidades a D, y como esa suma da al menos 10 (y como mucho 18) concluímos que C+9=10+D que despejando se reescribe como C = D+1. Sabiendo esto y que ambos suman 9, concluímos que C=5 y D=4. Nos queda:

$$\begin{array}{ccccc} & & 8 & 9 & 5 \\ + & 8 & 9 & 5 & 4 \\ \hline & 9 & 8 & 4 & 9 \end{array}$$

El número ABCD es igual a 8954.

3. Marce quiere completar los ocho círculos con: cuatro letras ‘A’, tres letras ‘B’y una ‘C’. Escribe una letra en cada círculo.

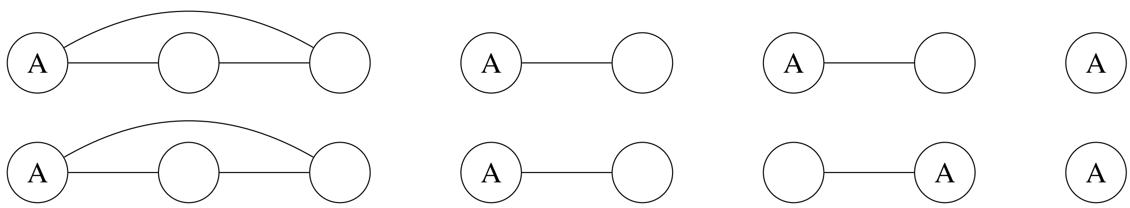


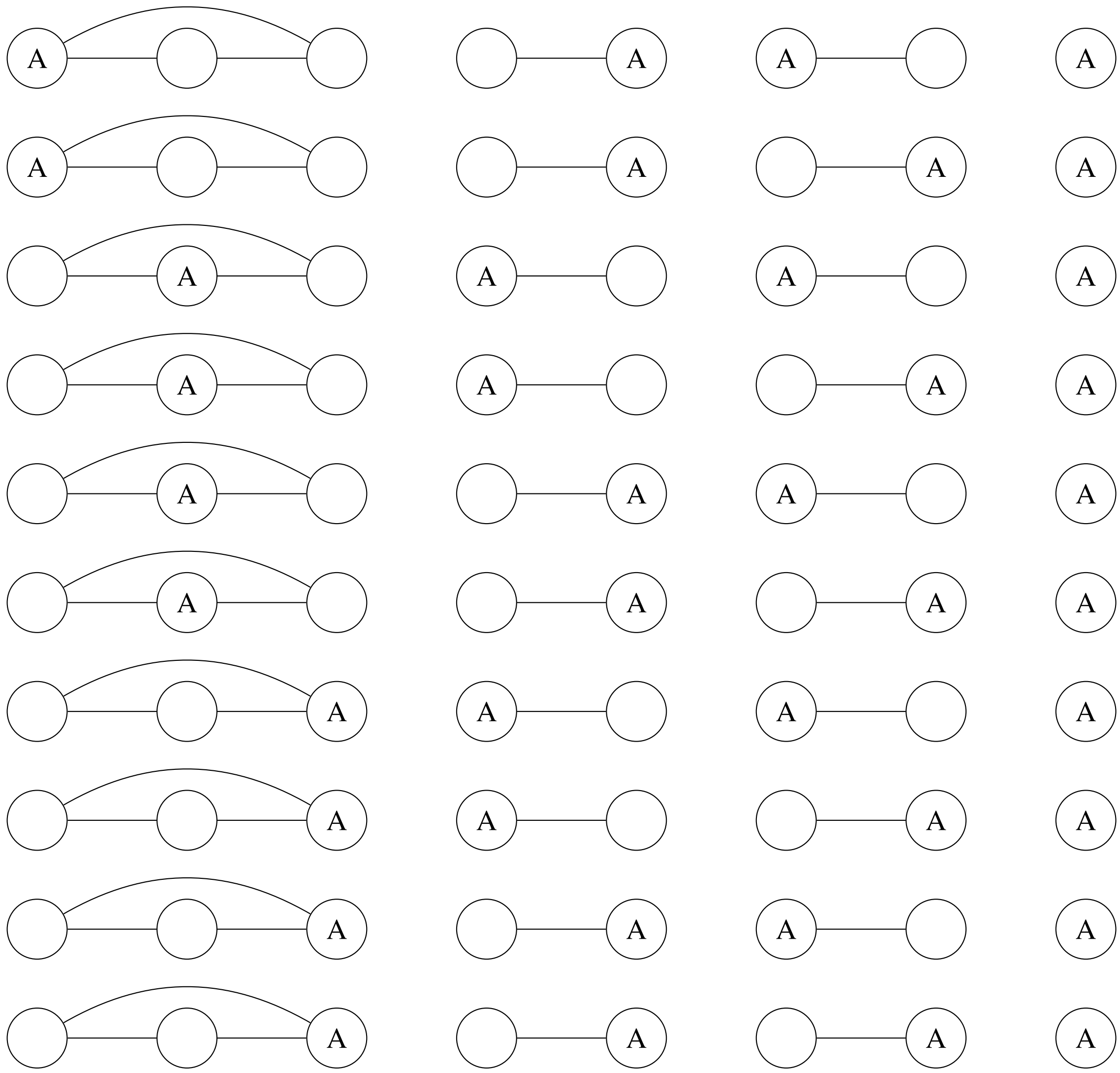
Si quiere que los círculos que están conectados tengan distintas letras, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

¿Cómo las contaron?

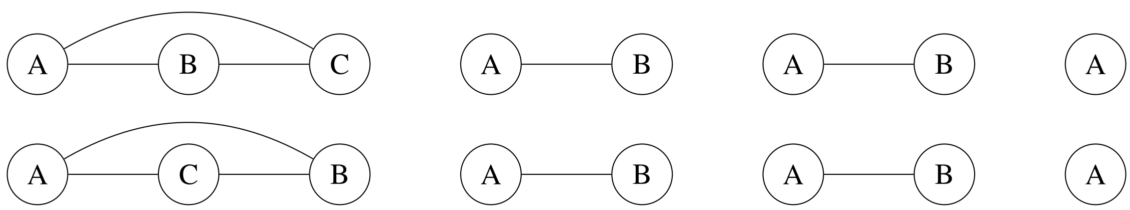
Solución

Como hay cuatro grupos de círculos y cuatro letras A, cada una debe ir en uno de estos grupos. Las distribuimos de todas las maneras posibles ordenadamente. Como hay 3 formas de ubicar la primer A, 2 para la segunda, 2 para la tercera y 1 para la cuarta serán $3 \times 2 \times 2 \times 1 = 12$ posibilidades.





Hay 12 maneras de distribuir las letras A. Para la primer forma de distribuir las letras A, distribuimos las tres B y la C. Notar que como en el primer grupo los círculos están todos conectados entre sí, la C debe estar en dicho grupo. Una vez ubicada la C, rellenamos con las B.



Son sólo dos maneras. Y lo mismo pasa con las demás formas de ubicar las letras A, ya que tengo que elegir donde poner la C en el primer grupo y luego rellenar con las B.
Concluímos que, en total, Marce puede completar la figura de $12 \times 2 = 24$ maneras distintas.

23ª Competencia de MateClubes 2020
Resolución de la Ronda de Entrenamiento
Cuarto Nivel

1. En un club los socios pueden jugar al básquet y/o tenis.

   El 52 % de los socios juega al básquet y 3/5 del total de los socios juegan al tenis.

   Los socios que practican ambos deportes son el cuádruple de los que no practican ninguno.

   ¿Qué porcentaje de los socios practica al menos un deporte?

   Explicar cómo llegaron al resultado.

   Solución

   Llamemos x al porcentaje de socios que practican ambos deportes (básquet y tenis).

   Como el 52 % de los socios juegan básquet, el porcentaje que juega *solo* básquet es $52-x$.

   Por otra lado, $3/5$ de los socios juegan tenis. Multiplicamos por 100 para pasar a porcentaje: $3/5 = 300/5 = 60$. Entonces el 60 % de los socios juegan tenis, y el porcentaje que juega *solo* tenis es $60-x$.

   Con estos datos podemos calcular que porcentaje no juega ningún deporte. Al total (100 %) le restamos el porcentaje que juega solo básquet, el porcentaje que juega solo tenis y el porcentaje que juega ambos. Es decir, $100-(52-x)-(60-x)-x$. Y esto es igual a $100-52+x-60+x-x = x-12$.

   Sabemos que el porcentaje que practica ambos deportes es el cuádruple de los que no practican ninguno. Tenemos que resolver la ecuación $x = 4(x-12)$:

$$\begin{aligned} x &= 4(x-12) \\ x &= 4x-48) \\ 48 &= 3x \\ 16 &= x \end{aligned}$$

   El porcentaje de los que juegan algún deporte es $(52-x)+(60-x)+x = 112-x = 96$.

2. Betty completa el tablero usando los números de 1 a 9 una vez cada uno y obtiene tres números: A, B y C, de tres cifras cada uno.

A	$\rightarrow$			
B	$\rightarrow$			
C	$\rightarrow$			

   Sabiendo que A es múltiplo de 36, B es múltiplo de 237 y C es múltiplo de 35, ¿cuál es el número C?

   Explicar cómo llegaron al resultado.

   Solución

   Primero vemos que C es múltiplo de 35. Por lo tanto, va a terminar en 0 o en 5. Como no podemos usar el 0, tiene que terminar en 5.

Analicemos ahora los casos para B. Los múltiplos de 237 de 3 dígitos son: 237, 474, 711 y 948. Como no puede haber dígitos repetidos, las únicas posibilidades son 237 y 948.

Consideramos primero el caso $B = 237$. Para A tenemos que buscar un múltiplo de 36 que no use los dígitos 0, 2, 3, 7 ni 5. Podemos usar divisibilidad por 9 y por 4 para buscar las posibilidades de A o directamente hacemos una lista de todos los múltiplos de 36 de 3 dígitos:

108, 144, 180, 216, 252, 288, 324, 360, 396, 432, 468, 504, 540, 576, 612, 648, 684, 720, 756, 792, 828, 864, 900, 936, 972

De estos eliminamos los que tienen dígitos repetidos, o contienen alguno de los digitos $0, 2, 3, 5, 7$ que no podemos usar. Nos quedan:

$$468, 648, 684, 864$$

Los 4 números tienen los mismos tres dígitos. Por lo tanto, C tiene que tener los dígitos que faltan: 1, 5 y 9. Y debe terminar en 5. Las dos posibilidades son 195 y 915. Pero ninguno de los dos es múltiplo de 35.

Por lo tanto, si $B = 237$ no hay solución.

Consideramos ahora el caso $B = 948$. Para A tenemos que buscar un múltiplo de 36 que no use los dígitos 0, 4, 9, 8 ni 5 y que no tenga dígitos repetidos.

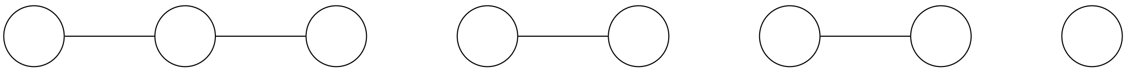
Mirando en la lista nos quedan:

$$216, 612$$

Los 2 números tienen los mismos tres dígitos. Por lo tanto, C tiene que tener los dígitos que faltan: 3, 5 y 7. Y debe terminar en 5. Las dos posibilidades son 375 y 735. El único múltiplo de 35 es 735.

Por lo tanto, el único valor posible de C es 735.

3. Marce quiere completar los ocho círculos con: cuatro letras 'A', tres letras 'B'y una 'C'. Escribe una letra en cada círculo.



Si quiere que los círculos que están conectados por una línea tengan distintas letras, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

¿Cómo las contaron?

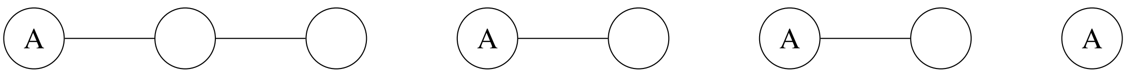
Aclaración: los círculos que no están conectados entre si por una línea pueden tener la misma letra. Por ejemplo, los tres primeros círculos se pueden completar así: A-B-A.

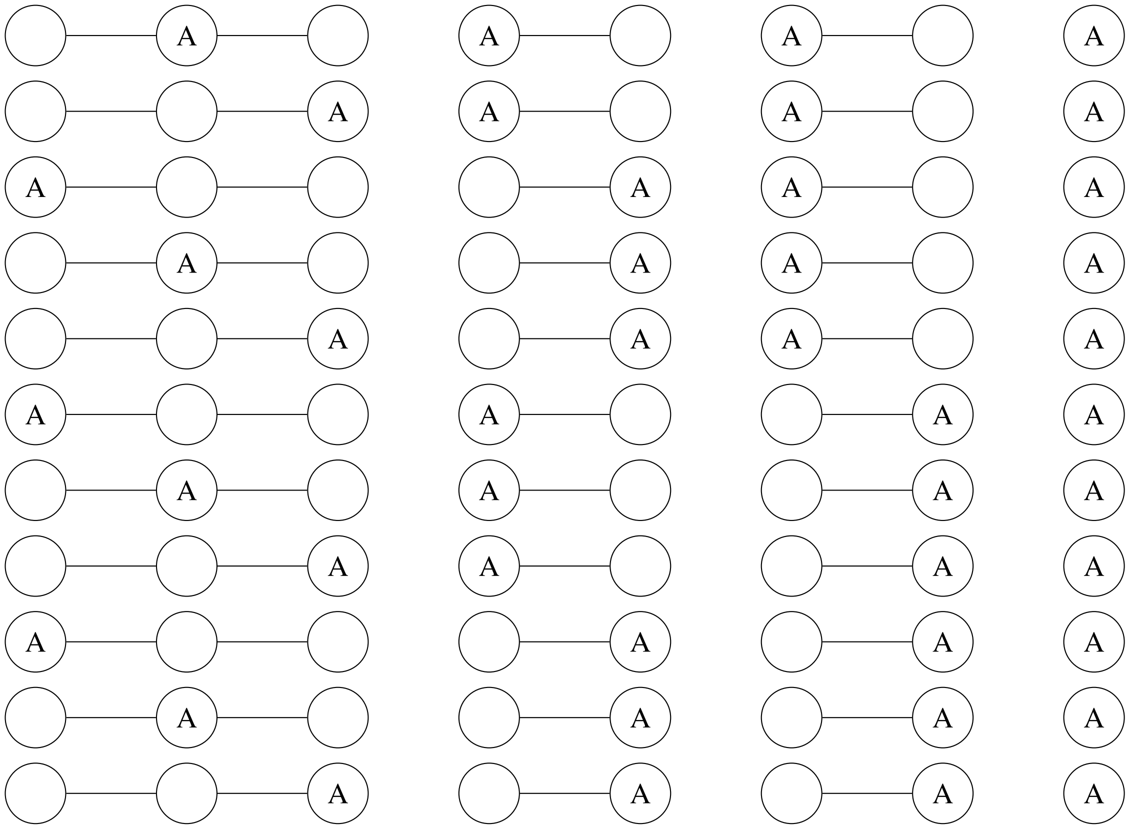
Solución

Veamos primero donde podemos ubicar las letras A. En el segundo, tercer y cuarto grupo, puede haber a lo sumo una A. En el primero puede haber a lo sumo 2.

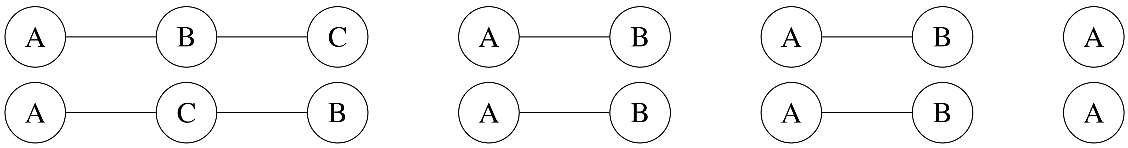
Si no ponemos ninguna A en el primer grupo, no vamos a poder ubicar todas las A. Tenemos que poner 1 o 2 letras A en el primer grupo.

Contamos primero los casos con una A. Para poder ubicar las 4 letras A tenemos que poner si o si una A en el último grupo. Por lo tanto, tenemos 3 posibilidades para la A en el primer grupo, 2 posibilidades para la A en el segundo grupo y 2 posibilidades para la A en el tercer grupo. En total: $3 \times 2 \times 2 = 12$ posibilidades:

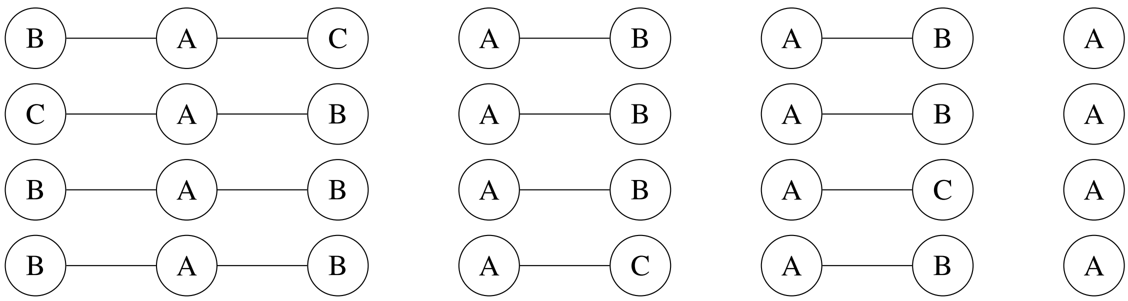




Para cada una de esas posibilidades, cuando la A no esta en el medio, tenemos dos formas de completar las letras B y C. Por ejemplo, para el primer caso:

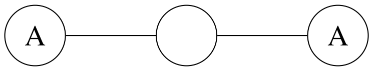


En cambio, si la A esta en el medio, tenemos cuatro formas de completar las letras B y C, porque podemos poner las dos B en el primer grupo. Por ejemplo, para el segundo caso:

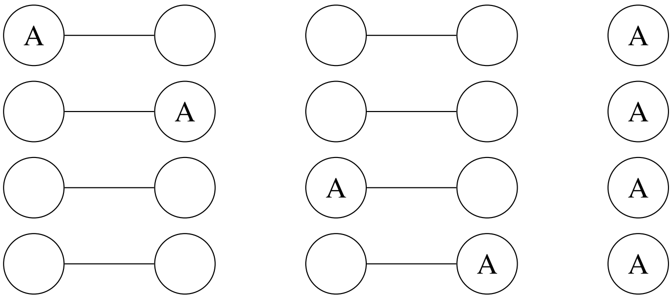


Teníamos 4 casos con la A en el medio en el primer grupo y 8 casos con la A en uno de los bordes. Entonces tenemos en total: $8 \times 2 + 4 \times 4 = 32$ posibilidades.

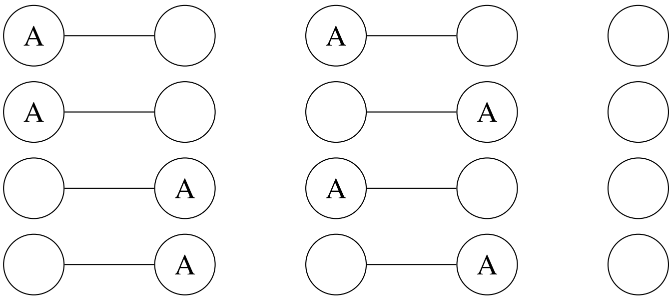
Nos falta analizar los casos con dos A en el primer grupo. Tenemos una sola forma de ubicar las dos A en el primer grupo.



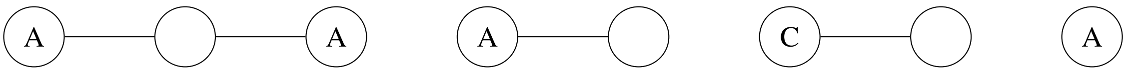
Para ubicar las otras dos A en los otros 3 grupos, tenemos 4 formas si ponemos una A en el último grupo:



y 4 casos si no ponemos una A en el ultimo grupo:



Para los primeros 4 casos, tenemos que ubicar la letra C en alguno de los dos círculos libres que están conectados, por ejemplo así:



y los tres círculos libres los completamos con letras B. Entonces tenemos $4\times 2 = 8$ posibilidades para estos casos.

Finalmente, para los últimos 4 casos en los que no hay una letra *A* en el último círculo, podemos ubicar la letra C en cualquiera de los cuatro círculos libres, por ejemplo así:

y los tres círculos libres los completamos con letras B.

Entonces tenemos $4\times 4 = 16$ posibilidades para estos casos.

Así terminamos de contar todos los casos. Tenemos en total: $32+8+16 = 56$ posibilidades.

23ª Competencia de MateClubes 2020
Resolución de la Ronda de Entrenamiento
Quinto Nivel

1. En un club los socios pueden jugar al hockey, básquet y/o tenis.

   Todos los socios practican al menos un deporte.

   El 69 % de los socios juega al hockey, el 27 % al básquet y el 28 % al tenis.

   La cantidad de socios que juega al básquet y al tenis, es 1/7 de los que juegan al hockey y al básquet.

   Además, la cantidad de socios que juega al básquet y al tenis, es la mitad de los que juegan al hockey y al tenis.

   El 1 % de los socios practica los tres deportes

   ¿Qué porcentaje de los socios juega solo al básquet?

   Solución

   Comencemos poniendole nombre a algunas cantidades, sea

   - H: el porcentaje de socios que solo juega al hockey.
   - B: el porcentaje de socios que solo juega al básquet.
   - T: el porcentaje de socios que solo juega al tenis.
   - HB: el porcentaje de socios que juegan al hockey y al básquet pero no al tenis.
   - BT: el porcentaje de socios que juegan al básquet y al tenis pero no al hockey.
   - HT: el porcentaje de socios que juegan al hockey y al tenis pero no al básquet.

   Recordemos que el 1 % de los socios practica los tres deportes. Escribamos los otros datos del problema usando los nombres que introdujimos, tenemos

$$
\begin{aligned}
69 &= H + HB + HT + 1 \\
27 &= B + HB + BT + 1 \\
28 &= T + HT + BT + 1 \\
7(BT + 1) &= HB + 1 \\
2(BT + 1) &= HT + 1.
\end{aligned}
$$

   Sumando las primeras tres cuaciones obtenemos

$$
\begin{aligned}
69 + 27 + 28 &= H + HB + HT + 1 + B + HB + BT + 1 + T + HT + BT + 1 \\
121 &= H + B + T + 2(HB + BT + HT).
\end{aligned}
$$

   Como todos los socios practican al menos un deporte tenemos

$$
\begin{aligned}
100 &= H + B + T + HB + BT + HT + 1 \\
99 &= H + B + T + HB + BT + HT.
\end{aligned}
$$

   Reemplazando en la ecuación anterior obtenemos

$$
\begin{aligned}
121 &= 99 + HB + BT + HT \\
22 &= HB + BT + HT.
\end{aligned}
$$

Ahora usando que $HB = 7(BT+1)-1 = 7BT+6$ y $HT = 2(BT+1)-1 = 2BT+1$, obtenemos

$$\begin{aligned} 22 &= HB+BT+HT \\ 22 &= 7BT+6+BT+2BT+1 \\ 15 &= 10BT \\ 1,5 &= BT. \end{aligned}$$

Entonces $HB = 7BT+6 = 7\times 1,5+6 = 16,5$ y finalmente obtenemos

$$B = 27-HB-BT-1 = 26-16,5-1,5 = 8.$$

Es decir, el 8 % de los socios juega solo al básquet.

2. Betty completa el tablero usando los números de 1 a 9 una vez cada uno y obtiene tres números: A, B y C, de tres cifras cada uno.

A	$\rightarrow$			
B	$\rightarrow$			
C	$\rightarrow$			

Sabiendo que A es múltiplo de 9, B es múltiplo de 173 y C es múltiplo de 55, ¿cuál es el número C?

Explicar cómo llegaron al resultado.

Solución

Primero vemos que C es múltiplo de 55. Por lo tanto, va a terminar en 0 o en 5. Como no podemos usar el 0, tiene que terminar en 5.

Analicemos ahora los casos para B. Los múltiplos de 173 de 3 dígitos son: 173, 346, 519, 692 y 865. Como no puede haber dígitos repetidos, y ya usamos el dígito 5 para el número C, las únicas posibilidades para B son son 173, 346 y 948.

Consideramos primero el caso B=173. Para A tenemos que buscar un múltiplo de 9 que no use los dígitos 0, 1, 3, 7 ni 5 y que no tenga dígitos repetidos. Usando el criterio de divisibilidad por 9, podemos ver que los únicos posibles dígitos de A son 4, 6 y 8. Cualquier reordenamiento de esos dígitos nos da un posible número A. En este caso, C tiene que tener los dígitos que faltan: 2 y 9, además de que termina en 5. Las dos posibilidades para C son 295 y 925. Pero ninguno de los dos es múltiplo de 55.

Por lo tanto, si B=173 no hay solución.

Consideramos ahora el caso B=346. Para A tenemos que buscar un múltiplo de 9 que no use los dígitos 0, 3, 4, 6 ni 5 y que no tenga dígitos repetidos. De nuevo, usando el criterio de divisibilidad por 9, tenemos dos posibilidades para los dígitos de A: 2, 7 y 9, o 1, 8 y 9.

En el caso en el que los dígitos de A sean 2, 7 y 9, nos quedaría que los dígitos de C son 1, 8 y 5. Las dos posibilidades para C son 185 y 815. Pero de nuevo, ninguno de los dos es múltiplo de 55.

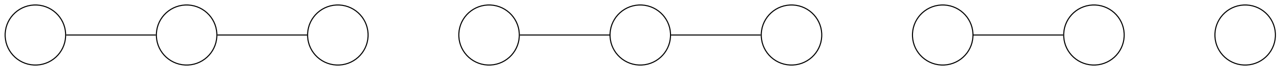
En cambio, si los dígitos de A son 1, 8 y 9, entonces los dígitos de C son 2, 7 y 5. En este caso, las dos posibilidades son 275 y 725. El único que es múltiplo de 55 es 275.

Finalmente, consideremos el caso B=692. Para A tenemos que buscar un múltiplo de 9 que no use los dígitos 0, 2, 6, 9 ni 5 y que no tenga dígitos repetidos. Mirando la divisibilidad por 9, los únicos posibles dígitos de A son 3, 7 y 8. En este caso, C tiene que tener los dígitos 1, 4 y 5. Las dos posibilidades para C son 145 y 415. Pero ninguno de los dos es múltiplo de 55.

Luego, si B=692 no hay solución.

Ya consideramos todos los posibles casos para B y por lo tanto, el único valor posible de C es 275.

3. Marce quiere completar los nueve círculos de la figura con: cinco letras ‘A’, tres letras ‘B’y una ‘C’. Escribe una letra en cada círculo.



Si quiere que los círculos que están conectados por una línea tengan distintas letras, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

Explicar cómo llegaron al resultado.

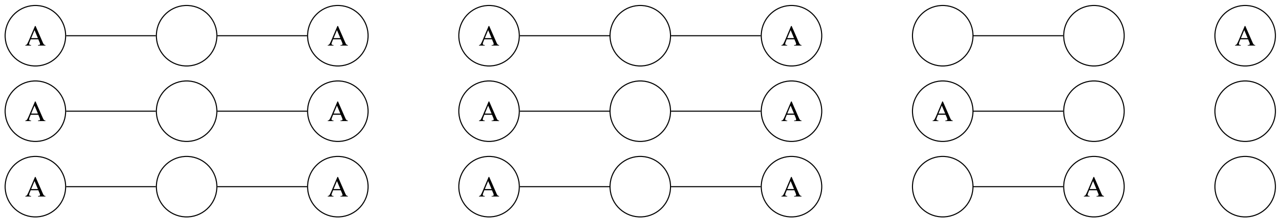
Aclaración: los círculos que no están conectados entre si por una línea pueden tener la misma letra. Por ejemplo, los tres primeros círculos se pueden completar así: A-B-A.

Solución

Veamos primero donde podemos ubicar las letras A. En el tercer y cuarto grupo, puede haber a lo sumo una A. En el primer y segundo grupo puede haber a lo sumo 2.

Si no ponemos al menos 3 letras A entre los dos primeros grupos, no vamos a poder ubicar todas las A.

Si ponemos 4 letras A entre los dos primeros grupos, nos queda una letra A que puede ir en el tercer o en el cuarto grupo. Tenemos entonces tres casos:

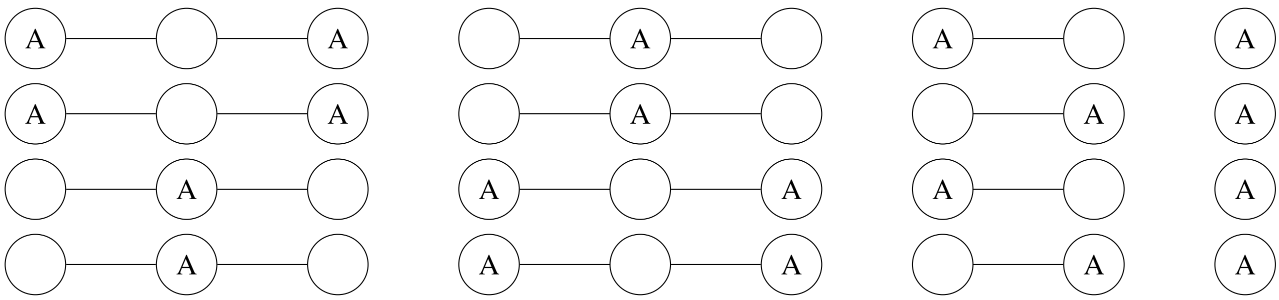


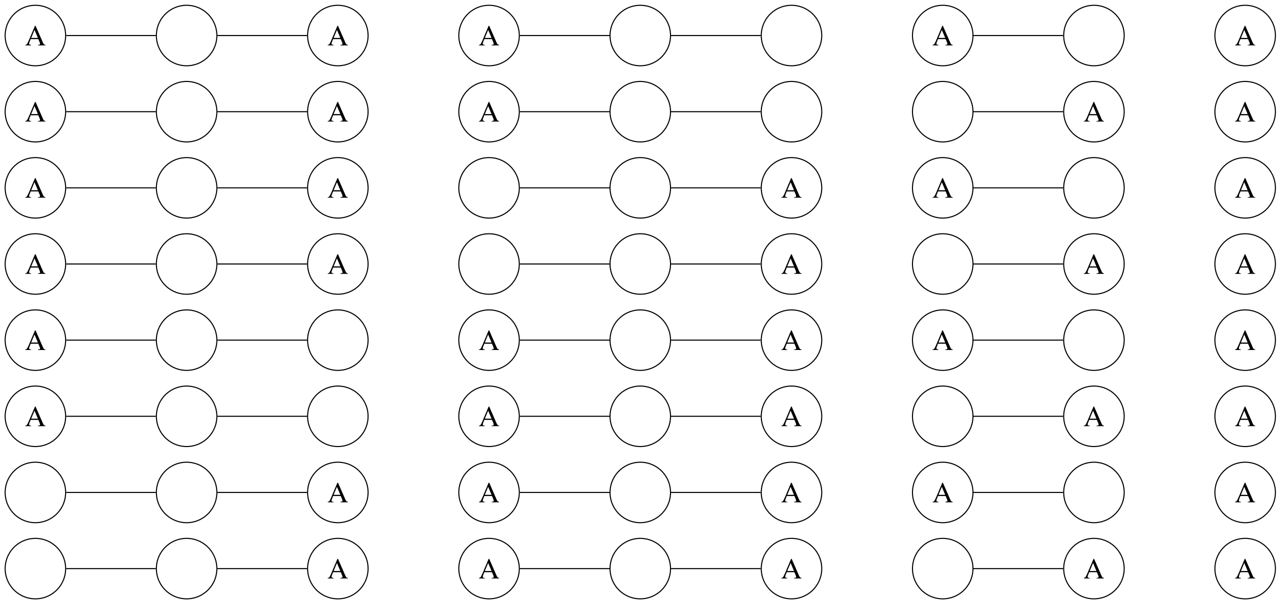
En el primer caso, la letra C tiene que ir en el tercer grupo, tenemos dos posibilidades. En los otros lugares completamos con letras B.

En el segundo y tercer caso, hay 4 posibilidades en cada uno para ubicar a la letra C, y en los lugares restantes completamos con letras B.

Nos quedan entonces: $2+4+4=10$ posibilidades.

Ahora consideremos todas las posibilidades para las letras A en el caso en el que hay tres letras A entre los dos primeros grupos. En este caso, tiene que haber una A en el tercer grupo y una A en el cuarto grupo.





En los primeros cuatro casos, donde uno de los dos primeros grupos tiene una A en el medio podemos colocar la letra C en cualquiera de los cuatro círculos vacíos, y completamos con letras B los lugares restantes. Tenemos $4 \times 4 = 16$ posibilidades.

En los otros ocho casos, la letra C debe ir en el grupo de tres letras que tiene una sola letra A. Hay dos posibilidades para ubicar la letra C en cada caso, y luego completamos con las letras B. Tenemos $8 \times 2 = 16$ posibilidades.

Ya analizamos todos los casos. En total, obtuvimos $10 + 16 + 16 = 42$ posibilidades.