18ª Competencia de MateClubes

Ronda preliminar – Soluciones

En todos los problemas, los participantes deben escribir la solución y la justificación, explicando paso a paso como llegaron a la solución.
Presentamos una o dos soluciones para cada problema.
Todos los problemas tienen muchas formas de llegar a la solución y cualquier resolución correcta es válida, aunque no coincida con las resoluciones que presentamos.

Nivel Preolímpico

1. Juan camina primero 80 metros, luego 130 metro, luego 70 metros y luego repite esas distancias.
Para saber dónde termina luego de caminar 640 metros, sumamos esos números hasta llegar a 640.
De los juegos al árbol, camina 80 metros.
Hasta el bebedero, camina en total 80 + 130 = 210 metros.
Hasta los juegos, camina en total 210 + 70 = 280 metros.
Hasta el árbol, camina en total 280 + 80 = 360 metros.
Hasta el bebedero, camina en total 360 + 130 = 490 metros.
Hasta los juegos, camina en total 490 + 70 = 560 metros.
Hasta el árbol, camina en total 560 + 80 = 640 metros.

Respuesta: luego de caminar 640 metros, está parado junto al árbol.

2. El numero 20 se puede obtener unicamente haciendo 5 x 4 o 4 x 5. Probando con ambas posibilidades, encontramos esta forma de completar la tabla.

3	x	5	=	15
+		x		
2	+	4	=	6
=		=		
5		20		

3. Es facil probar todas las posibilidades, lo hacemos:

8+3+2+1=14
8+3+2-1=12
8+3-2+1=10
8+3-2-1=8

8-3+2+1=8
8-3+2-1=6
8-3-2+1=4
8-3-2-1= 2

Respuesta: puede obtener 7 resultados distintos: 2, 4, 6, 8, 10, 12 y 14.

Nivel 1

1. El numero 3 se puede obtener únicamente de 4 formas: haciendo 1 x 3, 3 x 1, 1 + 2 o 2 + 1. Probando con estas posibilidades, encontramos esta forma de completar la tabla.

3	x	4	=	12
x		+		
1	x	7	=	7
=		=		
3		11		

2. Juan da 3 vueltas y camina en total 780 metros.
Por lo tanto, para dar 1 vuelta, camina 780 / 3 = 260 metros.
De los juegos al árbol y del árbol al bebedero camina en total 100 + 70 = 170 metros.
Por lo tanto, para completar la vuelta faltan 260 – 170 = 90 metros.

Respuesta: la distancia del bebedero a los juegos es de 90 metros.

3. Primero pensamos en la última cifra de los números que vamos a elegir. Es decir que buscamos números del 1 al 9 que al multiplicarlos el resultado termina en 6:

1 x 6 = 6
2 x 3 = 6
2 x 8 = 16
4 x 4 = 16
4 x 9 = 36
6 x 6 = 36
7 x 8 = 56

Ahora sumamos nuestros números para saber si el resultado termina en 3 o no:

1 + 6 = 7
2 + 3 = 5
2 + 8 = 10
4 + 4 = 8
4 + 9 = 13
6 + 6 = 12
7 + 8 = 15

La única posibilidad para la última cifra es 4 y 9. Si un número termina en 4 y el otro termina en 9, la suma de los dos números termina en 3 y la multiplicación termina en 6. Entonces los números que pudo haber elegido María son:

4 y 9
4 y 19
4 y 29
14 y 9
14 y 19
14 y 29
24 y 9
24 y 19
24 y 29

Nivel 2

1. Observamos algunas condiciones que tienen que cumplirse:

No puede elegir multiplicar en las dos filas porque para obtener 18 tiene que usar los números:
2 x 3 x 3 (repite el 3) 1 x 2 x 9 o 1 x 3 x 6
Y si Juan eligiera las dos últimas posibilidades se repetiría el 1.

Si Juan multiplica en la primera fila, la única posibilidad para el 1 es la primera casilla.

Probamos distintas posibilidades hasta encontrar la siguiente forma de completar la tabla.

1	x	2	x	9	=	18
x		x		+		
7	+	6	+	5	=	18
=		=		=		
7		12		14		

2. Es facil probar todas las posibilidades, lo hacemos:

9+3+2+1+1=16
9+3+2+1-1=14
9+3+2-1+1=14
9+3+2-1-1=12
9+3-2+1+1=12
9+3-2+1-1=10
9+3-2-1+1=10
9+3-2-1-1=8

9-3+2+1+1=10
9-3+2+1-1=8
9-3+2-1+1=8
9-3+2-1-1=6
9-3-2+1+1=6
9-3-2+1-1=4
9-3-2-1+1=4
9-3-2-1-1=2

Respuesta: puede obtener 8 resultados distintos: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 y 16.

3.
Al final de la fiesta habia 50-5-6-7= 32 globos.
Como la cantidad de globos verdes es igual a la cantidad de globos azules y los rojos son el doble que los azules, entonces cuatro veces la cantidad de globos azules era igual a la cantidad total de globos que era 32.
Habia 32/4=8 globos azules y por lo tanto 8 verdes y 16 rojos.
Entonces al principio habia 5+16=21 rojos, 6+8=14 verdes y 7+8=15 azules.

Nivel 3

1.

Solución 1:

Entre 1 y 600 hay 600/2=300 múltiplos de 2. Luego, Román borra 300 números.
Entre 1 y 600 hay 600/3=200 múltiplos de 3. Alfredo borra los múltiplos de 3, pero como Román ya borró los múltiplos de 2, sólo borra los múltiplos de 3 que no son múltiplos de 2, es decir los números que son múltiplos de 3 pero no de 6.
La cantidad de múltiplos de 6 entre 1 y 600 es 600/6=100. Luego Alfredo borra 200-100 números.
En total quedaron escritos 600-300-100=200 números.

Solución 2:

Empezamos viendo cómo borran los primeros números.
1 2 3 4 5 6 ...
Román borra los múltiplos de 2: 1 ~~2~~ 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ ...
Alfredo borra los múltiplos de 3 que quedan: 1 ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ 5 ~~6~~ ...
Quedan 2 números sin borrar entre los 6 primeros números.
Después se va a repetir la secuencia porque 6 es el mínimo común múltiplo de 2 y 3.
Hay 600/6=100 de estas secuencias de 6 números y por cada una de ellas quedan 2 números sin borrar.
En total quedaron escritos 100x2=200 números

2. Primero notamos que los numeros 36 y 30 solo se pueden obtener multiplicando números.
Para formar 36 se deben usar los números 1, 4 y 9 o los números 2, 3 y 6.
Para formar 30 se deben usar los números 1, 5 y 6 o los números 2, 3 y 5.
Como Juan no se puede repetir números, tiene que ubicar los números 1, 4 y 9 en la primera fila y los números 2, 3 y 5 en la segunda fila.

Probamos distintas posibilidades hasta encontrar la siguiente forma de completar la tabla.

9	x	4	x	1	=	36
+		+		x		
3	x	2	x	5	=	30
=		=		=		
12		6		5		

3. Al final de la fiesta habia 60-7-6-11= 36 globos.
Como la cantidad de globos verdes es igual al doble de la de azules y los rojos son el triple que los azules, al final de la fiesta tenemos:

azules+rojos+verdes=36
verdes=2*azules
rojos=3*azules

reemplazando obtenemos:

azules+3*azules+2*azules=36

6*azules=36
azules=36/6
azules=6
y por lo tanto
verdes= 12
rojos= 18
Entonces al principio habia 7+18=25 rojos, 6+12=18 verdes y 11+6=17 azules.

Nivel 4

1. Entre 1 y 1000 hay 1000/4=250 múltiplos de 4. Luego, Román borra 250 números.
El múltiplo de 6 más grande menor a 1000 es 996. Entonces la cantidad de múltiplos de 6 entre 1 y 1000 es 996/6= 166. Alfredo borra los múltiplos de 6, pero como Román ya borró los múltiplos de 4, sólo borra los múltiplos de 6 que no son múltiplos de 4, es decir los números que son múltiplos de 6 pero no de 12, el mínimo común múltiplo entre 6 y 4.
Como 996 es el múltiplo de 12 grande menor a 1000, la cantidad de múltiplos de 12 entre 1 y 1000 es 996/12=83. Luego Alfredo borra 166-83=83 números.
En total quedaron escritos 1000-250-83=667 números.

2. Hay que probar un poco, e ir observando cosas para ayudarse.
Por ejemplo, como a letras distintas corresponden digitos distintos debe haber acarreo hacia las unidades de mil, D tiene que ser A+1 y B+C mayor o igual a 10.
Hay 14 posibilidades, basta encontrar una de ellas:

1862+631=2493	4385+894=5279
1952+531=2483	4735+394=5129
2743+452=3195	6587+836=7423
2763+652=3415	7468+657=8125
3284+873=4157	8569+678=9247
4285+894=5179	8649+478=9127
4375+794=5169	8659+578=9237

3. Solución 1:
Primero pensamos en la última cifra de los números que eligió Juan. Como el resultado de la multiplicación termina en 3, las posibilidades son:
1 x 3 = 3
7 x 9 = 63

Una manera de pensar las posibilidades para que no falte ninguna es ver cuáles números multiplicados pueden dar 3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73 y 83.

En el caso que los números terminen en 7 y 9, pensamos para cada posibilidad terminada en 7 (17, 27, 37, etc.) si existe algún número de dos cifras terminado en 9 que cumpla con el enunciado.
17 x 19 = 323, 17 x 29 = 493, 17 x 39 = 663,
27 x 19 = 513, 27 x 29 = 783,
(No probamos con 37 o números más grandes porque 37 x 19 = 703 > 599)

Hacemos lo mismo para el caso en que los números terminen en 1 y 3.
11 x 13 = 143, 11 x 23 = 253, 11 x 33 = 363, 11 x 43 = 473, 11 x 53 = 583, 11 x 63 > 600).
21 x 13 = 273, 21 x 23 = 483, 21 x 33 > 600,
31 x 13 = 403, 31 x 23 > 600,
41 x 13 = 533, 41 x 23 > 600,
(No probamos con 51 o números más grandes porque 51 x 13 = 633 > 599)

Los números que pudo haber elegido Juan son:
27 y 19

11 y 53
41 y 13

Solución 2:
El resultado de la multiplicacion puede ser 503, 513, 523, … o 593.
Basta factorizar cada uno de estos numeros y ver si puede haberse obtenido como producto de dos numeros de dos cifras.

503 es primo, no se puede.
513= 3^3x19, se puede escribir como 27x19
523es primo, no se puede.
533=13x41, se puede escribir como 13x41
543=3x181, no se puede.
553=7x79, no se puede.
563 es primo, no se puede.
573=3x191, no se puede.
583=11x53, se puede escribir como 11x53
593 es primo, no se puede.

Los números que pudo haber elegido Juan son:
19 y 27
13 y 41
11 y 53

Nivel 5

1. El múltiplo de 6 más grande menor a 1000 es 996. Entonces la cantidad de múltiplos de 6 entre 1 y 1000 es 996/6= 166. Luego, Román borra 166 números.
Alfredo borra los múltiplos de 10, pero como Román ya borró los múltiplos de 6, sólo borra los múltiplos de 10 que no son múltiplos de 6, es decir los números que son múltiplos de 10 pero no de 30, el mínimo común múltiplo (mcm) entre 6 y 10.
Hay 1000/10=100 múltiplos de 10, y como 990 es el múltiplo de 30 más grande menor a 1000, entonces la cantidad de múltiplos de 30 entre 1 y 1000 es 990/30= 33. Alfredo borra 100-33=66 números.
Por último, como 990 es el múltiplo de 15 más grande menor a 1000, entonces la cantidad de múltiplos de 15 entre 1 y 1000 es 990/15= 66. Pero Román ya borró los múltiplos de 6 y Alfredo los múltiplos de 10. Entonces Federico sólo borra los múltiplos de 15 que no son múltiplos de 10 o que no son múltiplos de 6.
Pero los múltiplos de 15 que no son múltiplos de 10 son los múltiplos de 15 que no son múltiplos de 30 (mcm entre 15 y 10) y los múltiplos de 15 que no son múltiplos de 6, también son los múltiplos de 15 que no son múltiplos de 30 (mcm entre 15 y 6). Es decir, Federico borra los múltiplos de 15 que no son múltiplos de 30 y esta cantidad es 66-33=33.
Entonces quedaron escritos 1000-166-66-33=735 números.

2. Primero notamos que el número 60 solo se puede obtener multiplicando números y el numero 19 solo se puede obtener sumando números. Luego probamos distintas posibilidades hasta encontrar la siguiente forma de completar la tabla.

3	+	8	+	5	=	16
x		+		x		
1	x	7	x	2	=	14
x		+		x		
4	+	9	+	6	=	19
=		=		=		
12		24		60		

3.
Solución 1:
Primero pensamos en la última cifra de los números que eligió Juan. Como el resultado de la multiplicación termina en 7, las posibilidades son:
1 x 7 = 7
3 x 9 = 27

En el caso de números terminados en 1 y 7, el mínimo valor de la multiplicación sería 11 x 17 = 187 y el máximo valor sería 91 x 97 = 8827. Como sabemos que el resultado tiene que empezar con 9, debe ser un número entre 900 y 999.
Ahora para cada posibilidad terminada en 1 (11, 21, 31, etc) buscamos si existe un número de dos cifras terminado en 7 para que el producto esté entre 900 y 999.
900 ≤ 11 x M7 ≤ 999

$900/11 \leq M7 \leq 999/11$
$81,81 \leq M7 \leq 90,81$
Hay una solución con los números 11 y 87.

$900 \leq 21 \times M7 \leq 999$
$900/21 \leq M7 \leq 999/21$
$42,85 \leq M7 \leq 47,57$
Hay una solución con los números 21 y 47.

$900 \leq 31 \times M7 \leq 999$
$900/31 \leq M7 \leq 999/31$
$29,03 \leq M7 \leq 32,22$
No hay solución con 31.

$900 \leq 41 \times M7 \leq 999$
$900/41 \leq M7 \leq 999/41$
$21,95 \leq M7 \leq 24,36$
No hay solución con 41.

$900 \leq 51 \times M7 \leq 999$
$900/51 \leq M7 \leq 999/51$
$17,54 \leq M7 \leq 19,58$
No hay solución con 51.

No probamos con 61 o números más grandes porque $999/61 = 16,37 < 17$.

En el caso de números terminados en 3 y 9, el mínimo valor de la multiplicación es $13 \times 19 = 247$ y el máximo valor es $93 \times 99 = 9207$ (que es una solución). Sabemos que el resultado de la multiplicación debe empezar con 9 entonces debe estar entre 900 y 999 (3 cifras) o debe estar entre 9000 y 9999 (4 cifras).
La única solución donde la multiplicación de los números tiene 4 cifras es 93 y 99 porque $83 \times 99 = 8217$ y $93 \times 89 = 8277$.
Buscamos entonces las soluciones donde el resultado de la multiplicación tiene 3 cifras.
$900 \leq 13 \times M9 \leq 999$
$900/13 \leq M9 \leq 999/13$
$69,23 \leq M9 \leq 76,84$
No hay solución con 13.

$900 \leq 23 \times M9 \leq 999$
$900/23 \leq M9 \leq 999/23$
$69,23 \leq M9 \leq 76,84$
No hay solución con 23.

$900 \leq 33 \times M9 \leq 999$
$900/33 \leq M9 \leq 999/33$
$27,27 \leq M9 \leq 30,27$
Hay una solución con 33 y 29.

$900 \leq 43 \times M9 \leq 999$

$900/43 \leq M9 \leq 999/43$
$20,93 \leq M9 \leq 23,23$
No hay solución con 43.

No probamos con 53 o números más grandes porque $999/53 = 18,84 < 19$.

Los números que pudo haber elegido Juan son:
11 y 87
21 y 47
33 y 29
93 y 99

Solución 2:
El resultado de la multiplicacion puede tener 3 o 4 cifras.
Si tiene 3 cifras puede ser 907, 917, 927, … o 997.
Basta factorizar cada uno de estos numeros y ver si puede haberse obtenido como producto de dos numeros de dos cifras.

907 es primo, no se puede.
917=7x131, no se puede.
$927=3^2$x103, no se puede.
937 es primo, no se puede.
947 es primo, no se puede.
957=3x11x29, se peude de dos maneras: 33x29 y 11x87.
967 es primo, no se puede.
977 es primo, no se puede.
987=3x7x47, se puedeescribir como 21x47.
997 es primo, no se puede.

Si el numero tiene 4 cifras el producto debe dar mas que 9000, por lo tanto los dos numeros originales debe ser mayores a 90. Ademas el producto termina en 7, ambos deben ser impares. Probando con estas pocas posibilidades encontrarmos la posibilidad 93x99=9207.

Los números que pudo haber elegido Juan son:
29 y 33
11 y 87
21 y 47
93 y 99