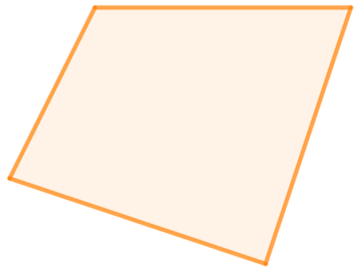
Torneo Geometría e Imaginación

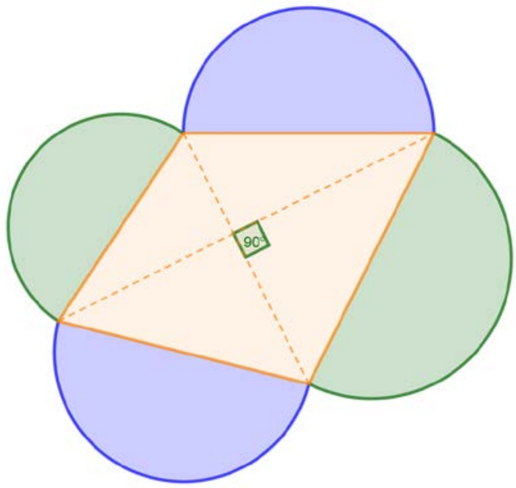
Problema Semanal de entrenamiento P15 – T4 – 2025

Indicar cómo inscribir el cuadrilátero de la figura en un paralelogramo cuya área sea el doble del área del cuadrilátero.



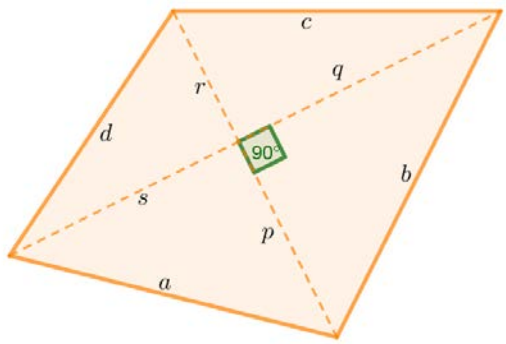
Solución P14 – T4 – 2025

En el cuadrilátero de la figura, las diagonales se cortan en ángulo recto. Mostrar que los semicírculos azules totalizan la misma área que la que totalizan los semicírculos verdes.



Solución:

Notemos con a, b, c y d las longitudes de los lados del cuadrilátero y con p, q, r y s los segmentos en los que se descomponen las diagonales por el punto de intersección de las mismas.



Por el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$a^2 = s^2 + p^2,\ b^2 = q^2 + p^2$$

de donde:

$$a^2 - b^2 = s^2 - q^2$$

En forma similar se puede establecer la igualdad:

$$d^2 - c^2 = s^2 - q^2$$

De las igualdades precedentes resulta:

$$a^2 + c^2 = b^2 + c^2$$

La suma de las áreas de los semicírculos azules está dada por:

$$\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{a^2 + c^2}{4}$$

y la suma de las áreas de los semicírculos verdes es:

$$\pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{b^2 + d^2}{4}$$

Luego, ambas suman toman el mismo valor dado que $a^2 + c^2 = b^2 + c^2$.