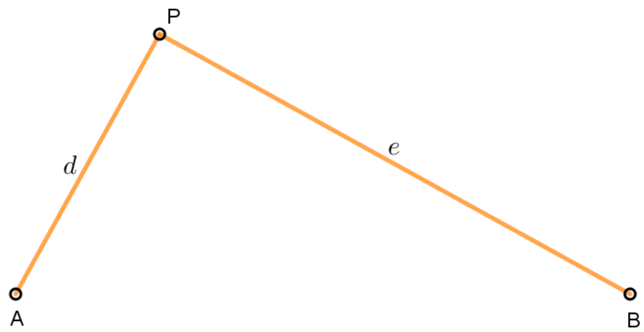
Torneo Geometría e Imaginación

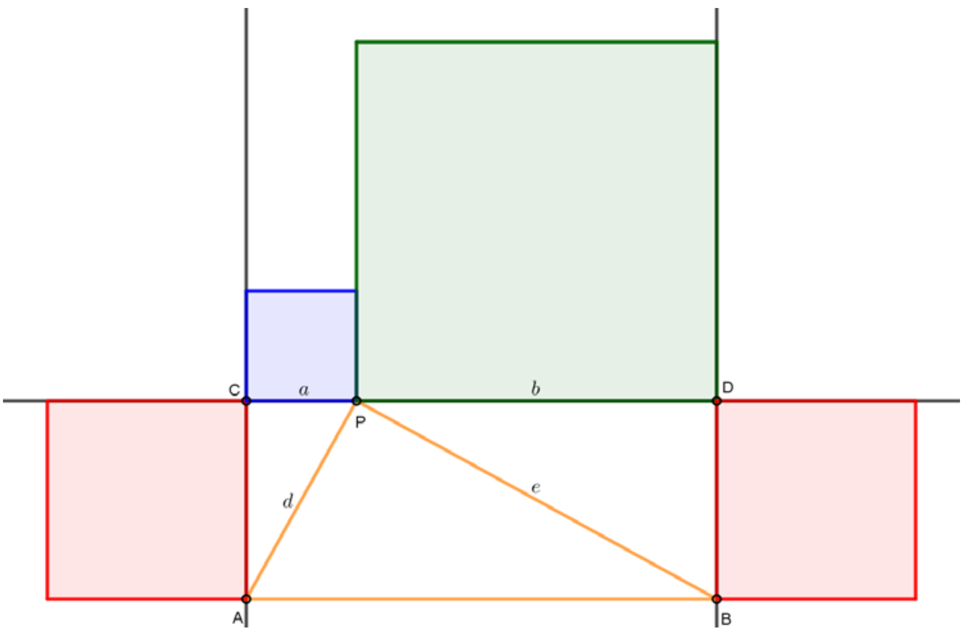
Solución P07 – 2026 – TGI

Dados dos puntos fijos *A* y *B*, hallar el lugar geométrico de los puntos *P* del plano tales que el cuadrado de la distancia de *P* a *B* menos el cuadrado de la distancia desde *P* a *B* sea igual a un número positivo *k*.

Solución: Es claro que los puntos de este lugar geométrico deben estar más cerca del punto *A* que del punto *B*. Dado un punto *P* como en la siguiente figura, vamos a representar el valor $e^2 - d^2$ con la longitud de un segmento.



Usando el Teorema de Pitágoras representamos e^2 y d^2, cada uno como suma de las áreas de dos cuadrados. Trazamos rectas perpendiculares al segmento *AB* por los puntos *A* y *B* y una paralela por el punto *P* al segmento *AB*.



Luego, dibujamos los cuadrados que muestra la figura precedente. El valor d^2 es la suma de las áreas del cuadrado rojo de la izquierda y del cuadrado verde, el valor e^2 es la suma de las áreas del cuadrado rojo de la derecha y del cuadrado azul. Como los cuadrados rojos son de igual área, $e^2 - d^2$ es la diferencia entre las áreas del cuadrado azul y el cuadrado verde. Indicando con *a* y *b* las respectivas longitudes de los cuadrados azul y verde, se tiene:

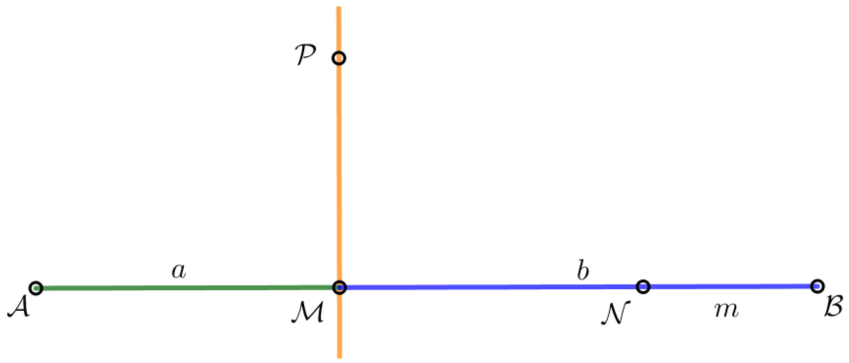
$$k = e^2 - d^2 = b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$$

como $b+a$ es la distancia entre *A* y *B*, $b+a$ es un valor constante y la condición precedente equivale a:

$$b - a = \frac{k}{b+a} = m$$

Hay exactamente un lugar en el segmento *CD* para ubicar el punto *P* bajo las condiciones del problema. En forma gráfica, *P* debe ser el punto medio entre *E* y *C*, siendo *E* el punto en el segmento *CD* tal que $ED = m$.

Podemos decir que *P* se encuentra en la recta perpendicular al segmento *AB* que pasa por el punto medio *M* entre *A* y *N*, siendo *N* el punto del segmento *AB* tal que $NB = m$.



Otra situación podría darse con el punto P se ubicado la izquierda de la figura, antes del punto A.